Einführung
in die PDGs

26.04.2019
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 03.05.2019 in der Vorlesung

Übungsblatt 3

Aufgabe 1: Harnack via Poisson **10 Punkte**

Zeigen Sie, dass für jedes $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $r > 0$ und harmonisches $u \in \mathrm{C}^2(\mathrm{B}_r(0); \mathbb{R}_{\geq 0})$ gilt

$$r^{d-2} \frac{r - |x|}{(r + |x|)^{d-1}} u(0) \leq u(x) \leq r^{d-2} \frac{r + |x|}{(r - |x|)^{d-1}} u(0) \qquad \text{für alle } x \in \mathrm{B}_r(0).$$

Dies ist eine explizite Version der Harnackschen Ungleichung. Verwenden Sie dabei in Ihrem Beweis die Poissonsche Darstellungsformel von harmonischen Funktionen (bzw. die Greensche Funktion auf Bällen).

Aufgabe 2: Cauchysche Darstellungsformel **10 Punkte**

Sei für $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $\mathbb{D}_r(z) := \{y \in \mathbb{C}\colon\ |z - y| < r\}$ die offene Kreisscheibe vom Radius r um z. Sei weiters $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie – unter Verwendung der Korrespondenz zwischen harmonischen und holomorphen Funktionen sowie der Poissonschen Formel für Bälle – dass für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\partial \mathbb{D}_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\,\mathrm{d}\xi.$$

Dies hängt insbesondere nicht von dem speziellen Radius r ab. Hierbei ist das Integral auf der rechten Seite im Sinne von Kurvenintegralen in $\mathbb{C}$ zuverstehen, wobei der Kreisrand $\partial\mathbb{D}_r(z_0)$ im mathematisch positiven Sinne orientiert ist.
Erinnerung: Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Kurve. Sei weiters $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann definieren wir

$$\int_\alpha g(\xi)\,\mathrm{d}\xi := \int_a^b g(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei der Punkt '$\cdot$' im Integranden die Multiplikation in $\mathbb{C}$ bezeichnet. Wir setzen dann

$$\int_{\partial\mathbb{D}_r(z)} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi := \int_\gamma g(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

wobei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \partial\mathbb{D}_r(z_0)$ eine Parametrisierung des positiv orientierten Kreisrandes $\partial\mathbb{D}_r(z_0)$ ist.

Aufgabe 3: Poissonformel und das Reflektionsprinzip **5 + 5 = 10 Punkte**

Sei $U^+ := \{x = (x_1, ..., x_d)^\top \in \mathbb{R}^d\colon\ |x| < 1,\, x_d > 0\}$.

(a) Sei $u \in \mathrm{C}^2(\overline{U^+})$ harmonisch in U^+ mit $u|_{\partial U^+ \cap \{x_d = 0\}} = 0$. Wir setzen für $x = (x_1, ..., x_d)^\top \in \mathrm{B}_1(0)$

$$v(x) := \begin{cases} u(x) & \text{falls } x_d \geq 0, \\ -u(x_1, ..., x_{d-1}, -x_d) & \text{falls } x_d < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $v \in \mathrm{C}^2(\mathrm{B}_1(0))$ und dass v harmonisch in $\mathrm{B}_1(0)$ ist.

(b) Nehmen Sie nun nur an, dass $u \in \mathrm{C}^2(U^+) \cap \mathrm{C}(\overline{U^+})$ mit $u|_{\partial U^+ \cap \{x_d = 0\}} = 0$. Zeigen Sie, dass dann v wie in (a) definiert ebenfalls harmonisch in $\mathrm{B}_1(0)$ ist.

Hinweis: Nutzen Sie die Poissonformel/Greensche Funktion für den Einheitsball.

Aufgabe 4: Subharmonizität **5 + 5 = 10 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

(a) Sei $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$ harmonisch und $\varphi \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass $v := \varphi(u)$ subharmonisch ist.

(b) Sei $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$ harmonisch. Zeigen Sie, dass $v := |Du|^2$ subharmonisch ist.