Übungen zu Analysis I

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. S. Conti — Dr. P. Gladbach — Dr. T. Simon

Probeklausur zur Analysis I - 23.12.19
Bearbeitungszeit: 90 min

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Name der Tutor: ____

Nicht für die Probeklausur relevant: Legen Sie bitte Ihren Studierendenausweis und Lichtbildausweis zur Identitätsüberprüfung auf Ihren Arbeitsplatz.

Nicht für die Probeklausur relevant: Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt (Rückseite mitbenutzen!).

Versehen Sie unbedingt jedes Blatt mit Ihrem Namen!

Außer einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen, insbesondere keine Bücher und keine elektronischen Geräte.

Die Lösung jeder Aufgabe ist in lesbarer Schrift abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Den unteren Teil bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Maximale Punktzahl	9	8	8	8	7	
Punkte						

Aufgabe 1 (9 Punkte):

Beantworten Sie die folgenden Fragen ohne Begründung.

(a) Ist $(\mathbb{N}, d)$ mit $d(x, y) := |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{N}$ ein vollständiger metrischer Raum?

(b) Sei $M \subset \mathbb{R}$. Man betrachte die beiden Aussagen
A : "M ist kompakt."
B : "Falls $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine konvergente Folge mit $x_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in M$."
Gilt $A \Rightarrow B$? Gilt $B \Rightarrow A$?

(c) Es sei $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, $x^* \in \mathbb{R}^n$. Man betrachte die beiden Aussagen
A : "$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$"
B : "$\lim\limits_{k\to\infty} |x_k| = |x^*|$"
Gilt $A \Rightarrow B$? Gilt $B \Rightarrow A$?

(d) Es sei $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, $x^* \in \mathbb{R}$. Man betrachte die beiden Aussagen
A : "(x_n) konvergiert nicht gegen x^*."
B : "Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt: $|x_n - x^*| \geq \varepsilon$."
Gilt $A \Rightarrow B$? Gilt $B \Rightarrow A$?

(e) Es sei $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Man betrachte die beiden Aussagen
A : "$x_n < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$."
B : "Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - c| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$."
Gilt $A \Rightarrow B$? Gilt $B \Rightarrow A$?

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie: Die Menge $S := \{x \in [0, 1] : f(x) = 0\}$ ist kompakt.

Aufgabe 3 (3+5 Punkte):

(a) Untersuchen Sie die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)^n$$
auf Konvergenz bzw. Divergenz.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2 + n}.$$
Für welche $x \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe?

Beweisen Sie ihre Antworten.

Aufgabe 4 (4+4 Punkte):

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^5 + x + 1$.

(a) Beweisen Sie ohne Ableitungen zu verwenden, dass f streng monoton wachsend und bijektiv ist.

(b) Sei g die Umkehrfunktion von f. Berechnen Sie $g'(3)$ mit Angabe Ihrer Argumentation.

Aufgabe 5 (4+3 Punkte):

Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle Cauchy-Folgen $x : \mathbb{N} \to (0,1)$ ist auch $f \circ x$ eine Cauchy-Folge.

(a) Ist f stetig?

(b) Ist f gleichmäßig stetig?

Beweisen Sie Ihre Antworten.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!