Aufgabe 1 (Cauchy-Produkt-Formel)**.** In dieser Aufgabe betrachten wir ein Gegenbeispiel zu der Cauchy-Produkt-Formel im Fall der nur bedingt konvergenten Reihen. Sei $a_n := (-1)^n/\sqrt{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_n a_n$ in $\mathbb{R}$ konvergiert aber *nicht* absolut konvergiert. (2 Pkt.)

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_k \sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j}$$

nicht konvergiert. (3 Pkt.)

Lösung. (a) Da $1/\sqrt{n+1}$ monoton fallend ist, konvergiert die Reihe $\sum_n a_n$ nach dem Leibniz-Kriterium. Aber die Reihe $\sum_n 1/\sqrt{n+1}$ konvergiert nicht (Lemma 6.10), und deshalb ist $\sum_n a_n$ nicht absolut konvergent.

(b) Wir berechnen

$$s_k := \sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{j+1}\sqrt{k-j+1}} \geq \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{k+1}} = 1.$$

Hieraus folgt $\sum_{k=0}^{n} s_k \geq n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und deshalb ist die Reihe $\sum_k s_k$ nicht konvergent. □

Aufgabe 2 (Unstetige Funktion)**.** Für $r \in \mathbb{Q}$ definieren wir

$$q_r := \min\{q \in \mathbb{N}_{\geq 1} \mid (\exists p \in \mathbb{Z})\, r = p/q\}.$$

(Das heißt, wir wählen q_r so, dass die Darstellung $r = p/q_r$ teilerfremd ist.) Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 1/q_x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Sei $a \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass f nicht stetig ist in a. (4 Pkt.)

(b) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass f stetig ist in a. (6 Pkt.)
Hinweis: Zeigen Sie zuerst dass $\inf_{p \in \mathbb{N}} |a - p/q| > 0$ für jedes $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Lösung. (a) Sei $a = p/q_a \in \mathbb{Q}$, sodass $f(a) = 1/q_a$. Für alle $\delta > 0$ gibt es ein $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ so dass $a < x < a + \delta$ (siehe Präsenzblatt 7, Aufgabe 4). Dann gilt $|a - x| < \delta$ aber $|f(a) - f(x)| = |1/q_a - 0| = 1/q_a$. Das heißt, für $0 < \epsilon < 1/q_a$ ist die Aussage

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in \mathbb{R})\ |a - x| < \delta \implies |f(a) - f(x)| < \epsilon$$

falsch, und somit ist f nicht stetig in a.

(b) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Für jedes $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ definieren wir

$$\delta_q := \inf_{p \in \mathbb{Z}} |a - p/q|\,.$$

Da a irrational ist, ist aq keine ganze Zahl, und somit gibt es $m \in \mathbb{Z}$ mit $m/q < a < (m+1)/q$. Es folgt dass $|a - p/q| > a - m/q$ für alle $p < m$ und $|a - p/q| > (m+1)/q - a$ für alle $p > m+1$, und deshalb

$$\delta_q = \min\{a - m/q, (m+1)/q - a\} > 0.$$

Sei $0 < \epsilon < 1$. Es gibt nur endlich viele $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $q \leq 1/\epsilon$, und wir betrachten

$$\delta := \min\left\{\delta_q \mid q \in \mathbb{N}_{\geq 1},\ q \leq 1/\epsilon\right\} > 0.$$

Sei nun $x \in (a - \delta, a + \delta)$ eine rationale Zahl $x = p/q_x$ mit $p \in \mathbb{Z}$. Dann folgt

$$\delta_{q_x} \leq |a - p/q_x| < \delta.$$

Aber hieraus folgt $q_x > 1/\epsilon$ und somit

$$|f(x) - f(a)| = f(x) = 1/q_x < \epsilon. \qquad \square$$

Aufgabe 3 (Zwischenwertsatz). (a) Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass

$$[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b]). \qquad \text{(2 Pkt.)}$$

(b) Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f: [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen *Fixpunkt* besitzt; das heißt, es existiert ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$. (2 Pkt.)

(c) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \exp(x) + x\exp(-x)$. Zeigen Sie, dass f mindestens eine Nullstelle hat; das heißt, es existiert $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$. (2 Pkt.)

(d) Sei $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in [0, 1 - 1/n]$ gibt mit $f(x) = f(x + 1/n)$. (4 Pkt.)

Lösung. (a) Sei $c \in [f(a), f(b)]$. Ist $c = f(a)$ oder $c = f(b)$, dann ist $c \in f([a, b])$ direkt klar. Wir betrachten noch den Fall $f(a) < c < f(b)$. Wir definieren eine stetige Funktion $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := f(x) - c$. Es gilt $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$, und es folgt aus dem Zwischenwertsatz dass ein $x \in [a, b]$ existiert mit $g(x) = 0$, das heißt $f(x) = c$ und deshalb $c \in f([a, b])$.

(b) Wir betrachten die Funktion $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) := x - f(x)$, und bemerken dass g auch stetig ist. Ist $g(a) = 0$ oder $g(b) = 0$, dann ist a oder b ein Fixpunkt von f. Wir nehmen nun an dass $g(a) \neq 0$ und $g(b) \neq 0$. Wegen $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ gilt dann $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$, und nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x \in [a, b]$ mit $g(x) = 0$; das heißt, $f(x) = x$.

(c) Wegen $e = \exp(1) > 1$ folgt $f(1) = e + 1/e > 0$ und $f(-1) = 1/e - e < 0$. Daher folgt aus dem Zwischenwertsatz dass f eine Nullstelle in $[-1, 1]$ hat.

(d) Wir betrachten die Funktion $g: [0, 1 - 1/n] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) := f(x + 1/n) - f(x)$, und bemerken dass g auch stetig ist. Ist $g(0) = 0$, dann ist $f(0) = f(1/n)$ und sind wir fertig. OBdA sei nun $g(0) > 0$ (ist $g(0) < 0$, dann betrachten wir $-f$). Wir behaupten dass ein $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ existiert mit $g(k/n) < 0$. Widerspruchsbeweis: ist $g(k/n) \geq 0$ für alle $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, so folgt

$$f(1) = f(0) + \sum_{k=0}^{n-1} g(k/n) = f(0) + g(0) + \sum_{k=1}^{n-1} g(k/n) \geq f(0) + g(0) > f(0),$$

und dies widerspricht die Voraussetzung $f(1) = f(0)$. Also es existiert ein $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ mit $g(k/n) < 0$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt dann dass ein $x \in [0, k/n]$ existiert mit $g(x) = 0$; das heißt, $f(x + 1/n) = f(x)$. $\square$

Aufgabe 4 (Sinus und Kosinus). Benutzen Sie in dieser Aufgabe nur die Definition von sin und cos (Definition 7.36), die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, die Definition von π (Definition 7.38), und die Gleichheiten $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

(a) Beweisen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ die Gleichungen

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z), \qquad \exp(-iz) = \cos(z) - i\sin(z), \qquad (\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1. \quad \text{(2 Pkt.)}$$

(b) Beweisen Sie für alle $x, y \in \mathbb{C}$ die Gleichungen

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \quad \text{(3 Pkt.)}$$

Schlussfolgern Sie hieraus die Verdopplungssätze

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \qquad \cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1. \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

(c) Beweisen Sie für alle $x, y \in \mathbb{C}$ die Gleichungen

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \qquad \text{(4 Pkt.)}$$

(d) Beweisen Sie die folgenden Gleichungen: (5 Pkt.)

$$\begin{aligned}
\cos(\pi/2) &= 0, & \sin(\pi/2) &= 1,\\
\sin(x+\pi/2) &= \cos(x), & \sin(x+\pi) &= -\sin(x),\\
\cos(x+\pi) &= -\cos(x), & \sin(x+2\pi) &= \sin(x),\\
\cos(x+2\pi) &= \cos(x), & \exp(i\pi/2) &= i,\\
\exp(i\pi) &= -1, & \exp(2\pi i) &= 1.
\end{aligned}$$

Lösung. (a) Wir berechnen direkt aus der Definition dass

$$\cos z + i\sin z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} + \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2} = \exp(iz)$$

und ebenso

$$\cos z - i\sin z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} - \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2} = \exp(-iz).$$

Die Funktionalgleichung $(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$ kann man auch direkt aus der Definition zeigen, oder man benutzt die oberen Gleichungen:

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = (\cos z + i\sin z)(\cos z - i\sin z) = \exp(iz)\exp(-iz) = \exp(0) = 1.$$

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) &= \frac{1}{4i}\big((\exp(ix) - \exp(-ix)\big)\big((\exp(iy) + \exp(-iy)\big)\\
&\quad + \frac{1}{4i}\big((\exp(ix) + \exp(-ix)\big)\big((\exp(iy) - \exp(-iy)\big)\\
&= \frac{1}{4i}\big(\exp(ix+iy) - \exp(-ix-iy) + \exp(ix-iy) - \exp(-ix+iy)\big)\\
&\quad + \frac{1}{4i}\big(\exp(ix+iy) - \exp(-ix-iy) - \exp(ix-iy) + \exp(-ix+iy)\big)\\
&= \frac{1}{2i}\big(\exp(ix+iy) - \exp(-ix-iy)\big)\\
&= \sin(x+y),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\cos x \cos y - \sin x \sin y &= \frac{1}{4}\big((\exp(ix) + \exp(-ix)\big)\big((\exp(iy) + \exp(-iy)\big) \\
&\quad + \frac{1}{4}\big((\exp(ix) - \exp(-ix)\big)\big((\exp(iy) - \exp(-iy)\big) \\
&= \frac{1}{4}\big(\exp(ix + iy) + \exp(-ix - iy) + \exp(ix - iy) + \exp(-ix + iy)\big) \\
&\quad + \frac{1}{4}\big(\exp(ix + iy) + \exp(-ix - iy) - \exp(ix - iy) - \exp(-ix + iy)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(\exp(ix + iy) + \exp(-ix - iy)\big) \\
&= \cos(x + y).
\end{aligned}$$

Setzen wir $y = x$, dann folgt der Verdopplungssatz für Sinus direkt, und der Verdopplungssatz für Kosinus folgt wegen $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

(c) Wir setzen $u := (x + y)/2$ und $v := (x - y)/2$. Aus der Definition von sin und cos sieht man dass $\sin(-v) = -\sin v$ und $\cos(-v) = \cos v$. Es gilt $u + v = x$ und $u - v = y$, und aus (b) folgt

$$\begin{aligned}
\sin x - \sin y &= \sin(u + v) - \sin(u - v) \\
&= \sin u \cos v + \cos u \sin v - \sin u \cos(-v) - \cos u \sin(-v) \\
&= 2 \cos u \sin v = 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.
\end{aligned}$$

Ebenso berechnen wir auch

$$\begin{aligned}
\cos x - \cos y &= \cos(u + v) - \cos(u - v) \\
&= \cos u \cos v - \sin u \sin v - \cos u \cos(-v) + \sin u \sin(-v) \\
&= -2 \sin u \sin v = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.
\end{aligned}$$

(d) Wir benutzen die Gleichheiten $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ und die Verdopplungssätze aus (b) und berechnen

$$\cos(\pi/2) = 2(\cos(\pi/4))^2 - 1 = 2(1/\sqrt{2})^2 - 1 = 0,$$
$$\sin(\pi/2) = 2 \sin(\pi/4) \cos(\pi/4) = 2 \cdot 1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{2} = 1.$$

Wenden wir die Verdopplungssätze nochmal an, dann folgt ebenso

$$\cos \pi = -1, \qquad \sin \pi = 0, \qquad \cos(2\pi) = 1, \qquad \sin(2\pi) = 0.$$

Mithilfe von der Teilaufgabe (b) berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned}
\sin(x + \pi/2) &= \sin x \cos(\pi/2) + \cos x \sin(\pi/2) = \cos x, \\
\sin(x + \pi) &= \sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi = -\sin x, \\
\cos(x + \pi) &= \cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi = -\cos x,
\end{aligned}$$

und hieraus folgt direkt auch $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ und $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$. Mithilfe von der Teilaufgabe (a) und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion berechnen wir schließlich

$$\begin{aligned}
\exp(i\pi/2) &= \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i, \\
\exp(i\pi) &= (\exp(i\pi/2))^2 = i^2 = -1, \\
\exp(2i\pi) &= (\exp(i\pi))^2 = (-1)^2 = 1.
\end{aligned}$$

□